

Szakaszonként lineárisan rugalmas szerkezetek periodikus szabadrezgése és modális elhanyagolási csillapítása

Bersényiné Geleji Borbála

Témavezető:

Németh Róbert Károly

Vásárhelyi Pál Építőmérnöki és Földtudományi Doktori Iskola



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

Tartalomjegyzék

1. A téma ismertetése, célkitűzés	3
1.1. Szakaszonként lineáris szerkezet	3
1.2. Célkitűzés	3
2. Előzmények, kutatási módszerek	4
2.1. Csigasorral függesztett gerenda	4
2.2. Modálanalízis	5
2.3. Nemlineáris normálmódok	5
3. A kutatómunka összefoglalása és a tézisek ismertetése	6
3.1. Rezgésalakok és frekvenciaparaméterek	6
3.2. Periodikus rezgések	11
3.3. A véges modálanalízis csillapító hatása	14
4. A dolgozat témájához kapcsolódó saját publikációk listája	17

1. A téma ismertetése, célkitűzés

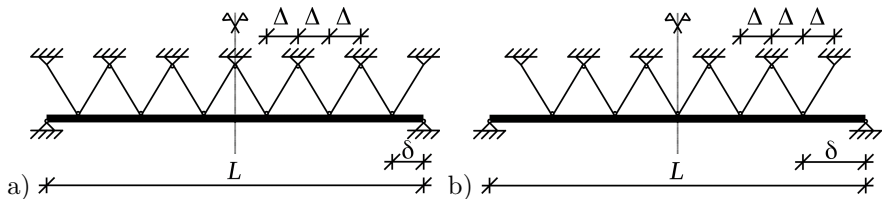
1.1. Szakaszonként lineáris szerkezet

Munkámban egy olyan szerkezet dinamikus vizsgálatával foglalkozom, melynek a merevsége nem állandó; valamilyen feltételhez kötött. Pontosítva, a pillanatnyi alakváltozás befolyásolja a szerkezet viselkedését, de a vizsgált tartományokon belül, bár különböző rugalmassági modulussal, a viselkedés lineárisan rugalmas. Ilyen szakaszonként lineáris, kétállapotú de csak egy szabadságfokú rendszer szabad- és gerjesztett rezgését vizsgálták (Shaw & Holmes, 1983). A többszabadságfokú modell irányába (Jiang et al., 2004) tett lépéseket, a szabadrezgésének vizsgálatával. Én pedig folytonos, vagyis végtelen szabadságfokú szakaszonként lineáris szerkezet szabadrezgését vizsgáltam.

1.2. Célkitűzés

A kutatás közvetlen előzménye a (Kocsis et al., 2015) cikk, amely a harmadolópontjaiban csigasorral függesztett gerenda vizsgálatáról szól. Ebben a publikációban numerikus számítás eredményeképpen az egyik esetben periodikus mozgást fedeztek fel, ami további kutatási irányt ígért. Felmerül a kérdés, hogy milyen körülmények között alakul ki periodikus rezgés? Ennek a további vizsgálatához létrehoztam a csigasoros gerendacsaládot (1. ábra), amelynek tagjai különböző számú és helyzetű felfüggesztési ponttal rendelkeznek. A dolgozat az alábbi kérdésekre keresi a választ:

- Hogyan lehet a több szabadságfokot összekötő kényszerrel megtámasztott szerkezet sajátfrekvenciáit és rezgésalakjait a szerkezetcsaládra algoritmizáltan meghatározni?
- Hogyan befolyásolja a felfüggesztési pontok száma és elhelyezkedése a rezgésalakokat és azok tulajdonságait?
- Létezik-e periodikus rezgés a kétállapotú szerkezetek esetében (a triálisokon kívül)? Ha igen, milyen feltételek mellett?
- A numerikus számítás során az állapotváltás energiaveszteséget okoz (Kocsis et al., 2015). Hogyan lehet ezt jellemezni, és mekkora a mértéke?



1. ábra. A csigasorral függesztett gerendacsalád egyik a) páros ($c = 3$) illetve egyik b) páratlan ($c = 2$) számú csigával felfüggesztett tagja

2. Előzmények, kutatási módszerek

2.1. Csigasorral függesztett gerenda

A vizsgált szerkezetben a nemlinearitást okozó kötél több ponton, csigasoron keresztül vezetve csatlakozik a gerendához. Ez a kényszer tehát több elmozdulás lineáris kombinációjára adja meg azt a feltételt, hogy a felfüggesztési pontok elmozdulásainak összege a kötél megnyúlásával lesz arányos. Egy ilyen kényszer jellemzője, hogy a statikai határozatlanság fokát csak kisebb mértékben növeli meg, mintha külön-külön támaszok lennének a felfüggesztési pontokban.

A létrehozott gerendacsalád tagjai a csigák, vagyis a felfüggesztési pontok számában és elhelyezkedésében különböznek egymástól, de mindegyikre igaz, hogy szimmetrikusak, és a felfüggesztési pontok egymástól azonos távolságra helyezkednek el. A csigák sugara, tömege, tehetlenségi nyomatéka és a súrlódás is elhanyagolható. A csigákon átvezetett kötél végtelen merev és tömege elhanyagolható, a benne ébredő erő konstans az egész kötél hosszán. A kötél nem képes nyomóerőt felvenni, ezért a kötél erő minden időpillanatban nemnegatív, és a kötél megnyúlása zérus, ezért a csigák elmozdulásainak összege minden időpillanatban nempozitív. A kötél feszessége szerint megkülönböztettem az aktív (a) illetve passzív (p) állapotot. Aktív állapotban a csigák elmozdulásainak összege zérus, passzív állapotban pedig a kötél erő zérus. A két állapot határán, vagyis állapotváltáskor ez a két mennyiség zérus.

2.2. Modálanalízis

A rezgéstani feladatok egyik hatékony megoldási módszere a modálanalízis. A lényege, hogy a szerkezet válaszát, vagyis az elmozdulások vektorát a rezgésalakok, vagy más néven normálmódok időfüggő lineáris kombinációjaként állítjuk elő. Előnye, hogy a rezgésalakok terében felírva a mozgásegyenlet mátrixai diagonálmátrixok lesznek, vagyis az egyenletrendszer szétesik a szabadságfokok számával megegyező számú egyenletté. Ezek a rezgésalakok a véges szabadságfokú feladatokban a mozgásegyenletből adódó általánosított sajátértékfeladat megoldásai. A végtelen szabadságfokú esetben a rezgésalakok végtelen elemű vektorokká vagyis (ortogonális) függvényekké válnak. Mivel a szerkezet szakaszonként lineáris, ezért minden szakaszon alkalmazható a modálanalízis. A végtelen szabadságfok végtelen számú rezgésalakot is jelentene, ezért a gyakorlati számításban csak végecsszámút vettem figyelembe. Ezzel tehát csak közelítettem az elmozdulások és a sebességek értékeit.

2.3. Nemlineáris normálmódok

A szuperponálhatóság miatt a rezgésalakokat lineáris normálmódoknak (LNM) is hívják. Ennek a módszernek a nemlineáris merevségű feladatokra való kiterjesztéséhez szükség van tehát a nemlineáris normálmódokra (NNM). A számos kutatás során a definíció csiszolódott. Mostanra általánosságban elmondható, hogy a NNM-ektől a következők elvárhatók:

- periodikus rezgést jelentenek
- mind a szabadrezgésre, mind gerjesztett rezgésre érvényesek
- függhetnek az amplitúdótól (és velük együtt a periódusidő is)

Míg a lineáris rezgések esetén a normálmódok lineáris kombinációi az összes megoldást megadják (Thomson, 1996), a nemlineáris esetben általában nem. Nemlineáris esetben is lehetségesek ilyen periodikus pályák, de ezek általában energia-, és így amplitúdófüggők, ezáltal nem szolgálhatnak lineáris modálanalízishez bázisként. Ezzel szemben nemlineáris analízishez felhasználhatók, különösen akkor, ha harmonikus vagy legalább periodikus gerjesztéssel foglalkozunk (Rand, 1974).

3. A kutatómunka összefoglalása és a tézisek ismertetése

3.1. Rezgésalakok és frekvenciaparaméterek

Először a csigasoros gerendacsalád tagjain a függesztőkötél megfeszített állapotában, vagyis aktív állapotban a rezgésvizsgálat alapjául szolgáló rezgésalakok és sajátfrekvenciák meghatározására került sor. A szabadrezgés differenciálegyenlete, amely minden tagra érvényes (Timoshenko, 1974):

$$EI \frac{\partial^4 \hat{v}(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 \hat{v}(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

ahol μ a gerenda fajlagos tömege, EI a gerenda hajlítómerevsége, $\hat{v}(x, t)$ a gerenda lehajlása a statikus teher hatására kialakult egyensúlyi helyzethez képest. A változók szétválasztása után keressük az $u(\hat{\xi})$ rezgésalakokat, amelyek a következő közönséges differenciálegyenlet megoldásai

$$\frac{EI}{L^4} \frac{\partial^4 u_q(\hat{\xi})}{\partial \hat{\xi}^4} - \frac{\mu \omega_{0q}^2}{T_0^2} u_q(\hat{\xi}) = 0, \quad (2)$$

ahol a q index az alakfüggvények sorszámára utal. A gerendát a két végpontja között a felfüggesztési pontok szakaszokra osztják, és egy-egy rezgésalak több ilyen, szakaszonkénti alakfüggvényből áll. A szakaszokhoz a $\bar{\xi}$ koordináta és az i index tartozik. Az alakfüggvények általános formája a következő:

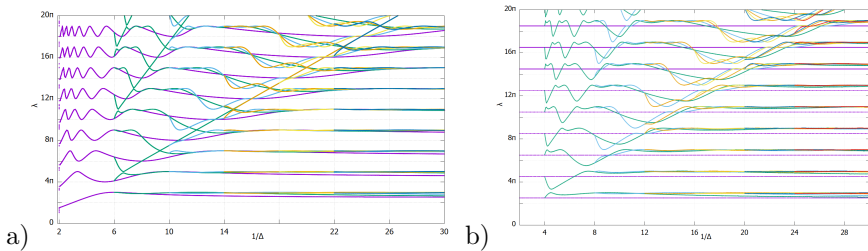
$$u_{q,i}(\bar{\xi}) = A_i \cos(\lambda_q \bar{\xi}) + B_i \sin(\lambda_q \bar{\xi}) + C_i \cosh(\lambda_q \bar{\xi}) + D_i \sinh(\lambda_q \bar{\xi}), \quad (3)$$

ahol λ_q a q -adik rezgésalakhoz tartozó frekvenciaparaméter, az A_i, B_i, C_i és D_i pedig a perem- és a csatlakozási feltételek alapján számítható paraméterek. A támaszokat, és szakaszhatárokon a megfelelő átmenetet az alakfüggvényekben a perem- és kapcsolódási feltételek írják le. Ezeket összegyűjtve írhatjuk röviden $\mathbf{F}\mathbf{c} = 0$ alakban, ahol $\mathbf{F}$ az ún. frekvenciamátrix, és $\mathbf{c}$ pedig az A_i, B_i, C_i és D_i ismeretlen együtthatók vektora. A szerkezet sajátrezgésalakjait eredményező λ_q frekvenciaparaméterek azok az értékek, ahol az $\mathbf{F}\mathbf{c} = 0$ egyenletnek nemtriviális megoldása van, vagyis ahol az $|\mathbf{F}| = 0$. Azonban minél több felfüggesztési

pont található a gerendán, annál nagyobb lesz a frekvenciamátrix, és így a determináns számítása egyre hosszadalmasabb lesz. A mátrix speciális szerkezetének kihasználásával ez a számítási igény jelentősen csökkenthető. Ehhez az első lépés a frekvenciamátrix egy megfelelő $F = \begin{bmatrix} R & S \\ Q & U \end{bmatrix}$ particionálása, ahol az R mátrix a páros esetben a bal felső 6×6 -os, páratlan esetben pedig a bal felső 4×4 -es blokk. Amennyiben a kvadratikus U mátrix nem szinguláris, úgy a frekvenciamátrix determinánsa előállítható a $|F| = |U| \cdot |R - SU^{-1}Q|$ alakban (Rózsa, 1991). Ez az U mátrix egy kontinuáns, Toeplitz-típusú hipermátrix, és a determinánsszámítása a következő formára egyszerűsíthető: $|U| = (-4)^{c-1}$, ami nem zérus, tehát az U nem szinguláris. Végeredményben a páros esetben az eredeti $(4c + 2) \times (4c + 2)$ méretű frekvenciamátrix helyett csak egy 6×6 -os méretű mátrixnak, páratlan esetben pedig az eredeti $(4c + 4) \times (4c + 4)$ méretű frekvenciamátrix helyett csak egy 4×4 -es méretű mátrixnak kell a determinánsát számolni.

1. Tézis

A csigasorral (vagyis több szabadságfokot összekötő kényszerrel) felfüggesztett tartó aktív felfüggesztéshez tartozó frekvenciaparaméterek számításához a frekvenciamátrixba először a peremfeltételeket, majd a kapcsolati feltételeket felfüggesztésenként felírva olyan blokkos szerkezetűre adódott, ami a determináns számítását egy sokkal kisebb, a felfüggesztési pontok számától független méretű mátrix determinánsszámítására vezette vissza. Nevezetesen, hogy a blokkosan felírt frekvenciamátrixot $F = \begin{bmatrix} R & S \\ Q & U \end{bmatrix}$ alakban partícionálva a determináns számítható a következőképpen: $|F| = |U| \cdot |R - SU^{-1}Q|$. Itt az R kvadratikus mátrix csak a peremfeltételek és a középpont kapcsolati feltételeinek sorait tartalmazza. Ilyenkor a kvadratikus U mátrix, amely a többi felfüggesztési pontnál fellépő kapcsolati feltételeket tartalmazza és mérete a felfüggesztési pontok számától függ, a fizikailag lehetséges esetekben nem szinguláris, Toeplitz típusú-, kontinuáns hipermátrix, melynek inverze analitikusan előállítható.

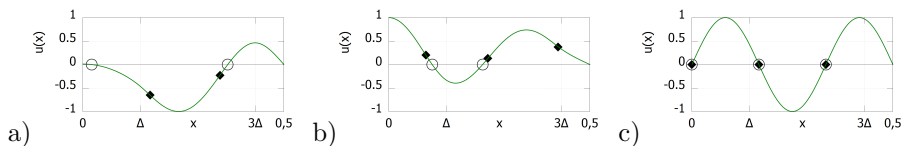


2. ábra. Frekvenciaterkép részleges felfüggesztés esetén, a gerendán a) páros illetve b) páratlan számú csigával. A színek a csigák számát jelölik, vagyis a $c = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ eseteket rendre a lila, zöld, világoskék, narancssárga, sárga, sötétkék, piros.

A q rezgésalakokhoz tartozó λ_q frekvenciaparaméterek meghatározásához a frekvenciamátrix determinánsának a zérushelyeit kell kiszámítani. Az $|\mathbf{U}|$ egy konstans érték, ezért elég az egyszerűsített determinánssal, $|\mathbf{R} - \mathbf{S}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{Q}|$ -val számolni. Mivel csak a zérushelyekre vagyunk kíváncsiak, így gyökvesztés nélkül leoszthattam az $|\mathbf{R} - \mathbf{S}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{Q}|$ tagot e^λ -val, és így numerikusan hatékonyabb eredményt kaptam.

A felfüggesztés topológiájának a frekvenciaparaméterekre való hatásának megismeréséhez, ún. frekvenciaterképeket állítottam elő, vagyis a λ frekvenciaparamétereket ábrázoltam a Δ csigák elhelyezkedésére utaló paraméter függvényében. Ezen görbeseregek előállításához a szimplex letapogatás módszerét alkalmaztam (Gáspár et al., 1997). A 2. ábrán láthatók a frekvenciaterképek. Ezeken az egyes színek a felfüggesztési pontok számát jelölik, az ezt jellemző c paraméter a gerenda felén elhelyezkedő csigák száma. A frekvenciaterképeken számos érdekes jelenség közül a következőket emelném ki. A Δ paraméter határai, vagyis, hogy c darab csiga elférjen a gerendán: páros felfüggesztésnél: $\Delta \leq \frac{1}{4c-2}$, páratlan felfüggesztésnél: $\Delta \leq \frac{1}{4c}$. Páros felfüggesztés esetén a $c = 1$ -hez tartozó lila görbék belépése $1\Delta = 2$ -nél a befogott-befogott (fél)gerendához tartozó $0,5\pi$ -nél történik, és az $1/\Delta$ növekedésével (a páratlan is) tart a befogott-csuklós megoldáshoz.

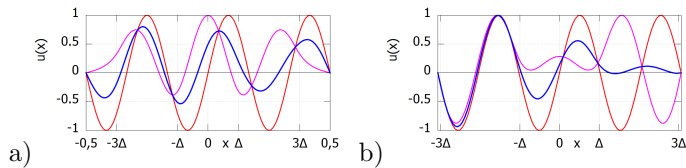
A tisztán szinuszos alakoknak közös jellemzője, hogy a $\lambda = (2\hat{k} + 1)\pi$ frekvenciaparaméterek tartoznak hozzájuk, ahol $\hat{k}$ pozitív egész szám. Ráadásul $2\hat{k} + 1$ szinuszfélhullámból állnak, így azonosak valamelyik felfüggesztés nélküli rezgésalakokkal. Ezek a megoldások zárt formában felírhatók, ezért az is megállapítható, hogy egyeneseken helyezkednek el a frekvenciaterképen.



3. ábra. A $c = 2$ páros felfüggesztésű szerkezet $1/\Delta = 7$ -hez tartozó, fél tartóra eső 4., 5., és 6. rezgésalakja a félgerendán. Körökkel és négyzetekkel jelöltem rendre a csomópontokat és az inflexiós pontokat.

A vizsgálat, és így a frekvenciatérképen megjelenő görbesereg a szimmetrikus rezgésalakokra irányul, de természetesen a ferdén szimmetrikus alakok is berajzolhatók: egy-egy vízszintes egyenes lenne a páros egészszer π értékeknél. Hagyományosan azt vártuk volna, hogy az alakokat növekvő sajátkörfrekvencia szerint sorba rendezve szimmetrikus és ferdén szimmetrikus alakok felváltva követik egymást, illetve hogy a csomópontok és az inflexiós pontok száma monoton növekvő. Ezzel szemben azt látjuk, hogy a frekvenciatérképen a ferdén szimmetrikus alakokhoz tartozó vízszintes egyeneseket a szimmetrikus alakokhoz tartozó görbék többször is elmetszik. Erre egy példát láthatunk a 3. ábrán. A $c = 2$ és $1/\Delta = 7$ esetben az első négy szimmetrikus alak frekvenciaparaméterei rendre $2,90\pi$; $4,74\pi$; $5,23\pi$ és $8,97\pi$, míg a ferdén szimmetrikus alakok esetén 2π ; 4π ; 6π és 8π . Itt tehát a harmadik szimmetrikus alak "megelőzi" a harmadik ferdén szimmetrikus alakot. Ezekben az esetekben a rezgésalakok csomópontjainak (körökkel jelölve) száma továbbra is monoton növekvő marad (4; 4; 5), viszont a rezgésalakok inflexiós pontjainak (négyzetekkel jelölve) száma nem (4; 6; 5).

Ahol a frekvenciatérkép görbéi metszik a páros egészszer π vízszintes egyenseit, azokban a pontokban a kérdéses frekvenciához egy szimmetrikus és ferdén szimmetrikus alak is tartozik. Ilyenkor ezek szimetriatulajdonsággal nem rendelkező kombinációi is sajátrezgésalakok lesznek. A 4. ábrán látható egy-egy szimmetrikus (magenta) és ferdén szimmetrikus (piros) alak, valamint ezek kombinációja (kék) mindkét esetre. a) $c = 2, \lambda = 6\pi, 1/\Delta = 7,999$; b) $c = 2, \lambda = 6\pi, 1/\Delta = 6,132$. Ha a frekvenciamátrixot a szimmetriafeltételek figyelembevételével nélkül felírjuk és kifejtjük a determinánsát, akkor a determináns zérus voltára való feltételi egyenletnek az ilyen λ értékek kétszeres gyökei lesznek.



4. ábra. Példák kétszeres gyökök esetén a külön megtalált szimmetrikus alakok (piros, magenta) és azok szimmetriatulajdonsággal nem bíró kombinációjára (kék).

2. Tézis

A csigasorral (vagyis több szabadságfokot összekötő kényszerrel) felfüggesztett gerendacsalád aktív felfüggesztéshez tartozó rezgésalakok frekvenciaparamétereit frekvenciatérképen (λ frekvenciaparaméter - Δ ferde kötélszakasz gerendára eső vetülete diagramon) meghatározva a következő megállapítások tehetők:

- tisztán szinuszos rezgésalakok lehetségesek az aktív esetben is, ha teljesül az alábbi feltételek valamelyike:

Páros c esetén:

$$a) \frac{1}{\Delta} = \frac{2k+2}{2r-1}$$

$$b) \frac{1}{\Delta} = \frac{(4k+2)c}{2r-1}$$

$$c) \frac{1}{\Delta} = \frac{(2k+1)c}{r} \text{ és } r \text{ nem lehet } c \text{ egész-szerese.}$$

Páratlan c esetén: $\frac{1}{\Delta} = \frac{(2k+1)(2c+1)}{r}$ és r nem lehet $(2c+1)$ egész-szerese

ahol $\lambda = (2k+1)\pi$ a tisztán szinuszos alakok frekvenciaparamétereit, r a zéruspontok sorszáma, és c a felfüggesztések száma a félgerendán.

- létezik olyan felfüggesztési paraméterérték, amelyre a sajátrezgésalakok páros- páratlan sorrendje zavart szenved, és a csomópontok, illetve inflexiós pontok száma nem adja meg egyértelműen a rezgésalak sorszámát
- az előző pont következménye, hogy bár a szerkezet szimmetrikus, léteznek szimmetriatulajdonsággal nem rendelkező rezgésalakjai is

3.2. Periodikus rezgések

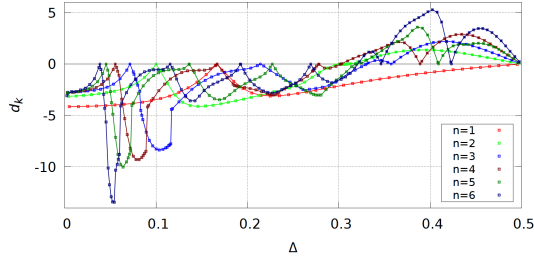
Az előbbiekben feltételeztem, hogy a szerkezetben a kötél nem válik passzívva. Oldjuk most fel ezt a feltételezést, és foglalkozunk mindkét állapottal, valamint természetesen magával a váltással. A továbbiakban csak azzal a gerendacsaláddal foglalkozom, amelynek a tagjain páros számú csiga helyezkedik el.

Passzív állapotban a rezgésalakok és a frekvenciaparaméterek megegyeznek az egyszerű csuklós-csuklós gerenda esetével. A rezgésalakok tehát tisztán szinuszosak, a frekvenciaparaméterek pedig π egész-számsorokai. *Aktív* állapotban a felfüggesztési pontok elmozdulásainak az összege zérus, ami tulajdonképpen a kötél megnyúlásával is felírható. A váltáskor mindkét jellemző, vagyis a kötél erő és a kötél megnyúlása is zérus. Az állapotok közötti váltás a rezgésalakból eredeztethető $T_{ij} = \int_{-L/2}^{L/2} u_i^p(x) u_j^a(x) dx$ transzformációs mátrix segítségével történhet.

Triviálisan periodikus rezgések közé tartoznak azok az esetek, amikor olyan mód szerint rezeg a gerenda, ami egyszerre aktív és passzív rezgésalak is. Ilyenek például a ferdén szimmetikus tisztán szinuszos alakok, de létezik szimmetrikus is. Passzív állapotban, ha egy fél alapperiódus zavartalanul le tud zajlani, vagyis ezalatt nem vált vissza a gerenda aktív állapotba, páratlan szinuszfélhullámnyi rezgés zajlik le. Ilyenkor a szakasz végén az elmozdulások és sebességek éppen az ellentettjei lesznek a passzív szakasz elején fellépőeknek. Ha aktív állapotból elindítjuk a gerendát az n -edik aktív rezgésalaknak megfelelő kezdeti kitéréssel, és zérus sebességgel, majd utána egy zavartalan passzív periódus következik, akkor a következő aktív állapotba váltás után a gerenda ismét az n -edik, vagyis a kiindulási aktív alak szerint rezeg. Az ilyen rezgéseket *Reguláris Nemlineáris Normálmódok*-nak (*RNNM*) nevezzük.

Hogyan tudjuk számszerűsíteni, hogy ne történjen korai váltás? Ha a félperiódus letelte előtt nem venne fel a kötélmegnyúlás-függvény pozitív értéket, akkor nem történik korai váltás. Ennek a vizsgálatára az első maximum (ami jellemzően a váltáskor felvett érték) utáni első stacionárius értékeket jelöltem ki. A véges analízis során a kiindulási n -edik aktív rezgésalakhoz képest $+5$ alakkal számolva már ez az e^k -val jelölt stacionárius értékből lehet következtetni arra, hogy ilyen *RNNM*-el van-e dolgunk.

Az e^k értékek $c = 1$ esetben láthatók az 5. ábrán. Ezen az ábrán, ha az $e^k < 0$ akkor nem történik korai váltás. Ilyet láthatunk az $n = 1$ kiindulási



5. ábra. Az e^k stacionárius értékek $c = 1$ esetben különböző aktív alakokból indítva, a Δ csigaelrendezés függvényében.

alak esetében minden Δ topológiára, illetve a többi kiindulási alakra is kellően kicsi Δ értékek esetén.

3. Tézis

A csigasorral $2c$ pontban felfüggesztett tartó egy kétállapotú, szakaszonként lineáris merevségű szerkezet, melynek egyik állapota reguláris. Amennyiben egy teljes félperiódust zavartalanul meg tud tenni a gerenda ebben a reguláris állapotban, úgy a félperiódus végén a modális jellemzők épp az ellentettjei a félperiódus elején fellépő értékeknek. A teljes félperiódus akkor tud zavartalanul lezajlani, ha nem történik korai állapotváltás. Ehhez arra van szükség, hogy a függesztőkötél ne feszüljön meg, azaz a kötélmegnyúlása ne vegyen fel pozitív értéket a félperiódus alatt. A numerikus számítás során ennek eldöntéséhez, ha a kiindulási aktív alak sorszáma n , akkor $n + 5$ db passzív alak figyelembevétele elegendő. Az n . aktív alakból indítva a rezgést, kis c értékek esetén a következő feltételek mellett tud bizonyítottan ez a teljes félperiódus zavartalanul lezajlani:

- az első $2c - 1$ aktív alakból indítjuk a szerkezetet, vagy
- a szerkezetet magasabb fokú alakból indítjuk, és a felfüggesztések közötti távolság elég kicsi: $(2c-1)\Delta < 0,3L$, ahol két felfüggesztés közötti távolság 2Δ , a gerenda hossza pedig L .

3.3. A véges modálanalízis csillapító hatása

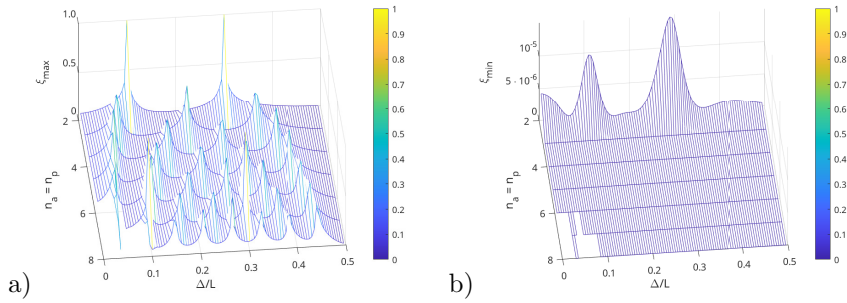
Ebben a részben már csak a gerendacsaládnak azokkal az eseteivel foglalkozom, amelyeken 2 db felfüggesztési pont helyezkedik el (páros, $c = 1$ esetek). A véges modálanalízis során minden egyes állapotváltás energiavesztéseget is okoz, mivel az az energia, ami az elhanyagolt rezgésmódokba transzformálódna, elveszik. Ezen energiavesztéséből adódó csillapításnak a *modális elhanyagolási csillapítás* nevet adtam. Ennek a vizsgálatához időlépéses vizsgálatot végeztem, és az időlépésekben számítottam a szerkezet mechanikai energiáját, vagyis a mozgási és a potenciális energiát. A vizsgálat során a számítás fél-analitikusan történt: egy adott kiindulási állapotban a modális koordináták időbeli lefutását követhetjük a harmonikus függvényével, de azt az időpillanatot, amikor a váltás bekövetkezik, már csak numerikusan lehet megtalálni.

A mozgási és a potenciális energia változását külön vizsgáltam. A K mozgási energiából a váltás után megmaradó hányadot az alábbi módon számolhatjuk:

$$\frac{K^p}{K^a} = \frac{\zeta^{aT} \Omega^a T^T T \Omega^a \zeta^a}{\zeta^{aT} \Omega^{a2} \zeta^a}, \quad (4)$$

ahol ζ^a a modális sebesség, Ω^a a sajátkőrfrekvenciákat tartalmazó spektrálmátrix, T pedig a váltás traszformációs mátrixa. Ezzel a (4) egyenlet ekvivalens a $(T^T T - \sigma^a I) s^a = 0$ sajátérték-feladat Rayleigh-hányadosával, ahol I az $n_a \times n_a$ egységmátrix, $s^a = \Omega^a \zeta^a$ tetszőleges vektor, a nemnegatív σ^a sajátérték pedig az arány maga akkor, ha a rezgésmódok s_a sajátvektor szerinti kombinációjával történik a váltás. A potenciális energia váltás előtti és után megmaradó hányadából a fentihez hasonló elven kaptam a nemnegatív τ^a sajátértéket, passzívból aktív állapotba történő váltásokból pedig a σ^p és τ^p hányadokat. Egy oda-vissza váltás, vagyis egy látszólagos periódus alatt a maradó mechanikai energia-arányt az előbbi sajátértékek közül választottam ki, a legkisebb értéke γ_{min} és a legnagyobb pedig γ_{max} .

Ezekből pedig egy ekvivalens viszkózus csillapítási tényező alsó és felső korlátját határoztam meg a következőképpen. Nézzünk egy m tömegű, s rugóállandójú egyszabadságfokú rendszert, melynek a csillapítása leírható a ξ csillapítási tényezővel, ami a $2\sqrt{sm}$ kritikus csillapítás hányada. Ilyenkor a szabadrezgés differenciálegyenlete: $m\ddot{x}(t) + \xi 2\sqrt{sm}\dot{x}(t) + sx(t) = 0$ (Den Hartog, 1985). A csigasorral függesztett gerenda esetén egy-egy oda-vissza mozgás



6. ábra. A ξ csillapítási tényező felső (a) és alsó (b) korlátja.

(látszólagos periódus) alatt fellépő energiavesztéshez (maradó energiahányad: γ) illesszünk egy ekvivalens ξ csillapítást, ami ugyanakkora veszteséget okoz egy periódus alatt. Ebből a következő összefüggést kaptam:

$$\xi = \frac{-\ln \gamma}{\sqrt{16\pi^2 + \ln^2 \gamma}}. \quad (5)$$

Az ekvivalens csillapítási tényezőre minden esetben teljesül, hogy $0 \leq \xi \leq 1$, vagyis a modális elhanyagolási csillapítás nem okozhat nagy csillapítást. Az ekvivalens csillapítási tényezőre kapott értékeket mutatja a 6. ábra.

4. Tézis

Egy kétállapotú, szakaszonként lineáris merevségű szerkezet rezgése során, ha a numerikus számításban véges sok rezgésalakot veszünk figyelembe, akkor minden állapotváltáskor az elhanyagolt módokba transzformálódó energia elveszik. Ezt a jelenséget neveztem el *modális elhanyagolási csillapítás*nak. Felírtam a veszteség után maradó energiák arányait egy-egy váltáskor, és kimutattam, hogy ezek a Rayleigh-hányadosai annak a két-két (általánosított) sajátérték-feladatnak, melyek sajátértékeiből következtethetők a maradó energiahányad alsó-felső korlátai. Ezzel egy oda-visszaváltás, mint látszólagos periódus alatti veszteségből egy ekvivalens logaritmikus dekrementum és egy ekvivalens viszkózus csillapítási hányad alsó és felső határát adtam meg.

Amellett, hogy egy-egy váltás során mekkora a veszteség, a másik tényező, ami befolyásolja a rezgésvizsgálat során ennek az energiaveszteségnek az időbeli lefolyását, az az, hogy milyen gyakran fordul elő az állapotváltás. Ezért az ekvivalens csillapítás mellett keresünk egy látszólagos periódusidőt is.

Passzív állapotban a sajátfrekvenciák regulárisak, vagyis mindegyik sajátfrekvencia egy páratlan számszorosa az elsőnek. Emiatt a felső korlátja a passzív állapotban eltöltött időnek az első periódus fele, vagyis $T_{0,1}^p/2$. Aktív állapotban nem regulárisak a sajátkörfrekvenciák, egyes esetekben mégis van egy periódus. Az aktív állapotban töltött idő felső korlátja: $T_{0,1}^a/2 + \sum_{q=2}^n T_{0,q}^a$.

Ahhoz, hogy a felső korlát helyett egy jó közeltíést kapjak a látszólagos periódusidőre, numerikus kísérletet végeztem úgy, hogy követtem az egyik, majd a másik állapotban töltött időket, és így egy aktív illetve passzív látszólagos félperiódust kaptam. Ebben a vizsgálatban három Δ értéket használtam: $0,15L$ -t, $0,3L$ -t és $0,45L$ -t. A figyelembe vett alakok száma 3, 4, 5 és 6 volt, és mindegyik esetben 20 különböző véletlenszerű kezdeti feltétel szerint indítottam el a mozgás vizsgálatát. Ezeket a véletlenszerű kezdeti feltételeket normál eloszlás szerint választottam ki, így kivédve az egyenlőtlen eloszlást a modális vektortérben (Muller, 1959).

Passzív állapotban az eredmények mutatták, hogy a fentebb leírt felső korlát nem csak a maximum, hanem egy idő után a preferált periódus. Aktív állapotban szintén úgy tűnik, hogy a látszólagos periódusidők pontosra hozzáigazodik valamelyik alak félperiódusidejéhez, de itt két különbséget is találtam a passzívhoz képest:

- az első félperiódusidő nem a maximum: a magasabb módusok kicsit kiterjeszthetik az aktív állapotban töltött időt, mivel azok nem regulárisak, de az elméleti maximum fennáll.
- a rezgést elég hosszú ideig követve felléphet elég zavarás az aktuális rezgésben ahhoz, hogy az egy magasabb módusra váltson.

Ez utóbbi pont pedig oda vezet, hogy elég sok váltás után a módok egy másik kombinációja válhat dominánssá. Ezzel a hosszútávú viselkedés illeszkedik ahhoz a mérnöki gyakorlatban szokásos elvhez, amely az első rezgésalakot kezeli a legfontosabbként.

5. Tézis

Egy kétállapotú, szakaszonként lineáris merevségű, rugalmas gerenda szabadrezgése során a váltások miatti veszteségek a rezgésmódok egy kombinációját kivéve szinte elhanyagolhatók. Ennek az a hatása, hogy a hosszú távú vizsgálat során a nagy veszteséget okozó rezgésmód-kombinációk leépülnek, a megmaradó közel veszteségmentes mozgás pedig olyan, hogy a látszólagos periódusidő az esetek többségében beáll a két állapot egy-egy (jellemzően az első) rezgésmódja félperiódusidejének összegére. Emiatt hosszú távon az ilyen szerkezetek periódusa közelíthető a következőképpen:

$$T \approx (T_{0,1}^p + T_{0,1}^a)/2,$$

ahol T a periódusidő, $T_{0,1}^a$, és $T_{0,1}^p$, pedig az aktív illetve a passzív első rezgésalakhoz tartozó periódusidő.

4. A dolgozat témájához kapcsolódó saját publikációk listája

B. Geleji and R. K. Németh. Függesztett gerendacsalád szabadrezgése I. sajátfrekvenciák és rezgésalakok számítása. *Építés-Építészettudomány*, 46:201-219, 2017. ISSN 0013-9661. doi: 10.1556/096.2017.005.

R. K. Németh and B. Geleji. Függesztett gerendacsalád szabadrezgése II. *Építés-Építészettudomány*, 46:351-370, 2017. ISSN 0013-9661. doi: 10.1556/096.2017.006.

R. K. Németh and B. B. Geleji. Nonlinear normal modes of a piecewise linear continuous structure with a regular state. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 62(4):1039-1051, 2018. doi: 10.3311/PPci.12512.

B. Geleji and R. K. Németh. Szakaszonként lineárisan rugalmas szerkezet modálanalízisével bevezetett numerikus csillapítás jellemzése. In E. Baksa, A.; Bertóti, editor, *XIII. Magyar Mechanikai Konferencia elektronikus kiadványa*, page 9p, 2019.

R. K. Németh and B. B. Geleji. Modal truncation damping in reduced modal analysis of piecewise linear continuum structures. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 0(0):1-24, 2021. doi: 10.1080/15397734.2021.1874414.97