



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

# **Topology Optimization: Deterministic and Probabilistic Problems**

## **Thesis of PhD dissertation**

**Author**            **Erika Pintér**  
                            **PhD candidate**

**Supervisor**      **Dr. Habil. János Lógó**  
                            **Professor**

**Budapest University of Technology and Economics**

**Faculty of Civil Engineering**

**Department of Structural Mechanics**

**June 2018**



*BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS*

*Faculty of Civil Engineering*

*Department of Structural Mechanics*

*Pál Vásárhelyi Doctoral School of Civil Engineering and Earth Sciences*

*1111 Budapest*

*Műgyetem rkp. 3.*

*epito.bme.hu*

*me.bme.hu*

*phd.epito.bme.hu*

*Erika Pintér*

*epinter@eik.bme.hu*



---

# Abstract

---

The subject of the dissertation is to investigate fundamental mechanical problems in the topology optimization field considering real engineering features. This research work presents the main results of my cooperation in the research project group of my supervisor Dr. János Lógó, which contributed to the intended aims of the project by additions and extensions. Performing parametric studies was a part of the task to check the reliability of the numerical calculation program.

The research work includes a new topology optimization area taking into account uncertainties in optimum structural design thus it deals with the consideration of loading uncertainties with probability variables via a fundamental optimization problem setting. Variability of loading in engineering design is realized e.g. in the action of various load combinations.

Optimization has gained widespread application because efficiency and economical design are essential requirements in modern engineering. Continuous advance can be observed in several areas and applications in the industry not only in terms of practical design but also of fundamental research. The determination of the optimal structural topology is a branch of fundamental research where the optimal topology is constructed in a design space based on given boundary conditions serving as a decision support for design.

The large number of publications with cross-references and the great past of optimization may make it difficult to find the appropriate preliminaries. In the first part of the project one of the tasks is to review the reliable publications and identify the new results. Vast majority of publications refer to Michell's works in 1904 as the foundation of this branch of mechanics, missing the fact that the first contributions were made by Maxwell as early as 1870, of whom even Michell made reference.

The aim of the tasks has been to supplement previous incomplete topics and to provide new contributions. Based on the fundamental problem statements of topology optimization, basic features of optimal topologies have been confirmed by performing comparative parametric analysis, such as the non-uniqueness of optimum solution, which may affect the statical determinacy of the structure under well-defined boundary conditions and practical considerations.



---

# Összefoglalás

---

Az értekezés tárgya a topológia optimalás témakörében, alapvető mechanikai problémák vizsgálata valós műszaki jellemzők figyelembe vétele mellett. Támogatott kutatási projekt keretében, Dr. Lógó János témavezetésével végeztem kutatómunkát, melynek eredményeivel segítettem kiegészíteni, kiterjeszteni a projekt célkitűzéseit és a numerikus számítási program megbízhatóságát ellenőrizni parametrikus feladatok vizsgálatával.

Új kutatási területet foglal magába a bizonytalanságok figyelembe vétele az optimális szerkezeti kialakítása során, így az építőmérnöki gyakorlatot alapul véve valószínűségi változókkal adott terhelés eseteire levezetett feladatokkal optimális topológiák lettek meghatározva a dolgozatban.

Az optimalás igen elterjedt alkalmazás, mivel a mai világban alapvető követelmény a hatékonyság és a gazdaságosság. Számos tudományágban és az ipari alkalmazásokat illetően folyamatosan fejlődés figyelhető meg, nemcsak konkrét tervezés esetén, hanem az alapkutatás vonatkozásában is. A szerkezeti topológia meghatározása az alapkutatás egy olyan ága, melyben adott peremfeltételek mellett egy tervezési területen adott programmal kialakítható a szerkezet optimális topológiája, mely egy döntéstámogató módszer a konkrét tervezéshez.

A kutatási munka első felében a megfelelő előzmények eredményeit bemutató kiadványok megtalálása volt a cél, hogy egyértelmű kép legyen kialakítható a megbízható irodalomról. A kutatás során megállapításra került, hogy már Maxwell is foglalkozott az optimalás témakörével és nem Michell volt az első, ahogy azt a felelhető cikkek jelentős része említi.

A feladatok célja volt a korábbi kutatások hiányosságait kipótolni és új eredményekkel kiterjeszteni. A korai kutatások feltevéseiből kiindulva a topológia optimalás olyan alapvető tulajdonságai lettek alátámasztva, mint az optimális elrendezés-megoldás nem egyértelműsége és a szerkezet határozottsági foka, gondosan felírt peremfeltételek mellett, továbbá a mérnöki gyakorlat igényeit szem előtt tartva.



---

# Table of Contents

---

<b>Abstract.....</b>	<b>1</b>
<b>Összefoglalás .....</b>	<b>2</b>
<b>Table of Contents.....</b>	<b>1</b>
<b>1 Thesis Statements .....</b>	<b>2</b>
<b>2 Az értekezés tézisei .....</b>	<b>6</b>
<b>Publications of the Author Related to Thesis .....</b>	<b>10</b>



---

# 1 Thesis Statements

---

## Thesis 1

A general procedure was presented based on the Prager-Rozvany layout theory for plastic design to produce analytical solutions by defining regions with the optimality conditions, thereby enabling to draw the optimal layouts in a simple way. I contributed in the elaboration of solutions for benchmarks problems; I derived, independently, analytical solution for stress-based optimization problem with two, alternative loads of different magnitude and direction, which satisfy the least-weight optimality conditions. It is found that for certain load cases the optimal plastic design became statically determinate, therefore it is also the optimal elastic design and the obtained result is in accordance with the Nagtegaal and Prager article, the conclusion is in agreement with Sved.

Connected publications: [EP10], [EP9], [EP7]

## Thesis 2

I investigated the effect of the discretization process parameters on the optimal topologies with an elaborated iterative algorithm via parametric studies on various plane stress beams. A number of Michell-type problems were examined by the minimization of the weight of the structure subjected to a compliance condition, the exact solution of which under special conditions provides a suitable basis for the reliability of the results.

**2(a)** I found that the optimal choice for a ground element size is three while the finite element mesh dimension is the same, when four-node quadrilateral elements are involved, to achieve the best efficiency on the computing time in terms of ground element size.

**2(b)** I analysed that while the finite element mesh dimension is the same, greater size of the ground element causes faster topology optimization convergence but decreases resolution and the constraints result in a numerically induced, artificially high stiffness, moreover different optimal solution patterns are obtained until the result becomes too coarse to be appropriate for design.

Connected publication: [EP1]



### Thesis 3

I participated in elaborating a numerical procedure for topology optimization considering the case of loads of uncertain magnitude and position in a way that if the loads are probabilistic, surrogate deterministic load cases, alternative loads are suggested to model the uncertainty.

**3(a)** I extended the topology optimization model that uses the iterative Continuum-type Optimality Criteria (COC) methods for discretized systems to incorporate multiple load cases.

**3(b)** I confirmed via parametric studies that the method is suitable for numerical calculation with appropriate computational times without considerable numerical errors. The process is valid under the following conditions: (i) minimum three independent load cases are needed to model the uncertainty connected to an uncertain point of application of the original load and (ii) the surrogate loading system is problem dependent.

Connected publications: [EP18], [EP17], [EP16], [EP15], [EP12], [EP11], [EP8]

### Thesis 4

**4.1** I made comparative analyses on the validity of the optimal truss and truss-like structures under stochastic loading through the examples of fundamental optimization problems which were found by Nagtegaal and Prager.

**4.1(a)** I demonstrated that non-uniqueness of solutions could be stated in the case of uncertain loading with a comparison between minimum volume design of statically determinate and indeterminate structures.

**4.1(b)** I concluded that the uncertainties could modify significantly the deterministically obtained optimal topologies and in case of probabilistic loading the optimal layout could be statically indeterminate structure. Moreover, the resulted optimal structures have smaller volume than the deterministic one, agreement with Nagtegaal and Prager.

**4.2** I investigated via a parametric study the influence of multiple loading to determine the optimal layout with respect to the initial layout. The cases of considering compliance and stress constraints and the uncertainty of loading direction are taken into account in the problem statement.



**4.2(a)** I stated through a simple example that several (practically infinite number of) alternative statically indeterminate structures having the same volume and compliance or stress-constraint value could be constructed if a statically determinate structure exists which proves that not only one type of layout can be optimal.

**4.2(b)** I presented that as long as the inclination of loading direction from vertical is small, which is probable in practice, 3-bar structure has less total volume. Based on engineering optimization design a statically indeterminate structure should be considered for safety from the unexpected load cases point of view.

Connected publications: [EP14], [EP13], [EP12], [EP11], [EP8]

## Thesis 5

**5.1** I formulated a basic example of a truss-like structure with rigid connections based on the results of the truss optimization taken from the literature while the loading is defined by stochastic variables.

**5.1(a)** I analysed the task both as a bar structure (frame model) and a planar continuum (disk) structure to compare with the truss model to numerically determine the layout, size, and volume of the optimal truss and I derived analytical solutions to support the numerical results.

**5.1(b)** I determined the optimal truss structure topologies in the case of two alternative loads subject to stress limit and elastic behaviour for a wide range of system parameters.

**5.2** I determined the topology and size of the optimal structure which minimize the volume (that is the amount of material) for various force ratios and force vector directions by creating a numerical iterative algorithm.

**5.2(a)** Using a numerical iterative procedure I stated that the optimum topology is typically statically determinate, however, in a certain domain of parameters a statically over-determinate degenerate structure represents the minimum volume and in another domain the solution can be statically indeterminate.

**5.2(b)** In special cases I confirmed the numerical results by analytical calculations. The numerical and analytical investigations have proved that the solution in certain cases is non-unique.





**5.3** I performed an analysis of a chosen structure modelled as a frame construction and a two-dimensional (plane stress state) continuum model by finite element methods in order to determine the influence of the choice of the model on the optimal structure.

**5.3(a)** I concluded that the optimal designs – calculated by the truss model (that is structures with hinges) – are valid only for this type of structures. In structures where the joints are not constructed perfectly free of moments even the small bending moments occurring simultaneously with the dominant normal forces lead to significant excess normal stresses which involve the undersizing of the structure.

**5.3(b)** The comparative analyses had the same results (with negligible difference) both showing the significant excess stresses. With the investigated example I demonstrated that for the determination of optimum frame structures an optimization procedure using continuum model is required.

Connected publications: [EP6], [EP5], [EP4], [EP3], [EP2]



## 2 Az értekezés tézisei

---

### 1. Tézis

A Prager-Rozvany elrendezés-elméleten alapuló általános, képlékeny tervezésre szolgáló eljárást ismertettem, amely az optimalitási kritériumok alapján megállapítható tartományok segítségével ad analitikus megoldást, ezáltal az optimális kialakítás egyszerűen felrajzolható.

Részt vettem referenciapéldák kidolgozásában, olyan két, különböző nagyságú és irányú alternáló erővel adott terheléssel bővített, feszültségkorláttal felírt optimalizációs feladat analitikus megoldását vezettem le függetlenül, mely az alternáló terhelést figyelembe véve kielégíti a legkisebb súlyra vonatkozó optimalitási feltételt. Megállapítottam, hogy a terhek bizonyos eseteire a képlékeny alapon tervezett optimális megoldás statikailag határozott és egyúttal a rugalmas optimum is, a kapott eredmény összhangban van a Nagtegaal és Prager cikkben részletezettekkel, a következtetés egyező Sved megállapításával.

Kapcsolódó publikációk: [EP10], [EP9], [EP7]

### 2. Tézis

Dolgozatomban az optimalizációs diszkrétizációs folyamatában egyes, alapvető paraméterek megváltoztatásának hatását vizsgáltam az optimális topológiákra, mely során levezettem egy iterációs eljárását, hogy releváns síkbeli feszültségállapotú gerendamodellek numerikus számítási eredményeit tanulmányozzam. Engedékenységi feltételek mellett, a minimális súlyra való tervezés során több Michell-féle feladatot vizsgáltam, amelyeknek speciális feltételek mellett adott pontos megoldásai megfelelő alapot szolgáltatnak az eredmények megbízhatóságára.

**2(a)** Megállapítottam, hogy a számításban a véges elemes hálóméret változtatása nélkül az alapelem méretének optimális beállítása három véges elem, ha négy-csomópontú kvadratus véges elemet választunk. Így érhetjük a legjobb hatékonyságot a számítási idő tekintetében.

**2(b)** Elemeztem, hogy a véges elemes hálóméret változtatása nélkül, nagyobb alapelem méret választása konvergencia-sebességnövelő, de csökkenti az eredmények felbontását és a felírt peremfeltételek mesterségesen nagy merevséget eredményeznek a numerikus számítás tulajdonságai miatt. Továbbá igen különböző optimális megoldási alakzatok



adódnak olyan mértékben, hogy a durva felbontás miatt már nem minősíthető optimális tervezésre alkalmasnak.

Kapcsolódó publikáció: [EP1]

### 3. Tézis

Olyan topológia optimalizációs numerikus eljárás kidolgozásában vettem részt, mely figyelembe veszi a terhelés bizonytalanságát a teher nagysága vagy helyzete szempontjából úgy, hogy ha a terhelés valószínűségi változókkal adott, akkor a bizonytalanság modellezhető helyettesítő terhelési esetekkel, alternatív terheléssel.

**3(a)** Kiterjesztettem az iteratív, klasszikus optimalitási feltétel (COC) módszerét alkalmazó diszkretizációs rendszeren alapuló topológia optimalizáló modellt több terhelési eset figyelembevételére.

**3(b)** Parametrikus vizsgálatok elemzésével megerősítettem, hogy a módszer alkalmas numerikus számítások elvégzésére megfelelő futtatási idővel és számottevő numerikus hibák nélkül. Az eljárás az alábbi feltevések mellett alkalmazható: (i) legalább három független terhelési eset szükséges modellezni az eredeti terhelés támadáspontjának bizonytalanságát és (ii) helyettesítő terhelési rendszer függ a feladat meghatározásától.

Kapcsolódó publikációk: [EP18], [EP17], [EP16], [EP15], [EP12], [EP11], [EP8]

### 4. Tézis

**4.1** Összehasonlító elemzést végeztem a rácsos tartók és rácsszerű szerkezetek kialakítására vonatkozóan sztochasztikus terhelés esetében a Nagtegaal és Prager által publikált alapvető optimalizációs problémafelvetések alapján.

**4.1(a)** Statikailag határozott és határozatlan szerkezetek legkisebb térfogatra történő tervezését összehasonlítva bemutattam, hogy a megoldás nem lehet egyértelmű bizonytalan terhelés feltételezése mellett.

**4.1(b)** Megállapítottam, hogy a terhelési bizonytalanságok jelentősen befolyásolhatják a determinisztikus számítás útján kapott optimális topológiákat és valószínűségi változókkal adott terhelés esetén statikailag határozatlan szerkezet is lehet az optimális kialakítás. Továbbá, az így kapott optimális szerkezetek térfogata kisebb lesz a determinisztikusan számítottakhoz képest.



**4.2** Paraméteres feladatok segítségével a többszörös terhelés esetének hatását vizsgáltam meg az optimális elrendezés kialakítására az eredeti elrendezéshez viszonyítva. A feladat megfogalmazása során figyelembe lettek véve az engedékenységi és feszültség korlátok esetei valamint a valószínűségi változóval adott változó irányú terhelés.

**4.2(a)** Egy egyszerű példán segítségével megállapítottam, hogy ha létezik egy statikailag határozott szerkezet, akkor számos (gyakorlatilag végtelen számú) alternatív, statikailag határozatlan szerkezetet alakítható ki azonos térfogat vagy azonos rúdfeszültség mellett, így alátámasztva, hogy az optimális megoldás nem egyértelmű.

**4.2(b)** Bemutattam, hogy mindaddig, amíg a terhelés irányának dőlésszöge kismértékben tér el a függőlegetől, ami a gyakorlatban valószínűsíthető, addig a három-rudas szerkezet kisebb ösztérfogattal rendelkezik. A mérnöki optimális tervezéskor megfontolásra javasolt statikailag határozatlan szerkezet kialakítása esetlegesen nem várt terhelési esetekkel szembeni biztonság szempontjából.

Kapcsolódó publikációk: [EP14], [EP13], [EP12], [EP11], [EP8]

## 5. Tézis

**5.1** A rácsos tartók optimalizálását bemutató irodalomkutatásom alapján definiáltam egy alapfeladatot merev csomópontú rácsszerű szerkezetek esetére sztochasztikus valószínűségi változókkal adott terhelési eset figyelembevételével.

**5.1(a)** Keret- és lemezmodellt használva összehasonlító elemzést végeztem rácsszerű tartószerkezetekre, mely során numerikusan felírható az optimális rácsos tartó topológiája, mérete és térfogata, valamint az így kapott eredmények igazolására alkalmas analitikus számításokat vezettem le.

**5.1(b)** Két, alternáló terhelést feltételezve olyan rácsos szerkezetek optimális topológiáit határoztam meg, melyek feszültségkorlát figyelembevételével és rugalmas modell esetén a rendszert leíró paraméterek egy széles skáláján érvényesek.

**5.2** Különbféle erőarányok illetve erővektor-irányok függvényében meghatároztam a térfogatot (azaz anyagmennyiséget) minimalizáló optimális szerkezet topológiáját és méreteit numerikus iteratív algoritmus felírásával.



**5.2(a)** Megállapítottam, hogy az optimális topológia tipikusan statikailag határozott szerkezet, azonban a paraméterek bizonyos tartományában elfajuló statikailag túlhatározott szerkezet jelenti a térfogatminimumot, míg egy más tartományban a megoldás statikailag határozatlan szerkezet is lehet.

**5.2(b)** Az egyedi esetekben a numerikus eredményeket analitikus számításokkal is igazoltam. Így a numerikus és analitikai vizsgálatok együtt bebizonyították, hogy a megoldás bizonyos esetekben nem feltételenül egyedi.

**5.3** Keretszerkezetet illetve kétdimenziós (síkbeli feszültségállapotú) kontinuum-modellt használva a mechanikai modell megválasztásának az optimális megoldásra gyakorolt hatását vizsgáltam végeselemes számítási eljárással.

**5.3(a)** Megállapítottam, hogy a rácsostartó-modellen (tehát csuklós kapcsolatokkal kialakított szerkezeten) számított optimumok érvényessége csak e tartótípusra vonatkozik; a nem tökéletesen nyomatékmentesen kialakított kapcsolatokkal rendelkező szerkezetekben a meghatározó normálerő mellett jelenlévő kicsiny nyomatékok is olyan jelentős normálfeszültség-többletet eredményeznek, amelyek a szerkezet alultervezettségét jelentik.

**5.3(b)** A keretszerkezetet és síkbeli feszültségállapotú kontinuum-modellt vizsgáló összehasonlítás során megállapítottam, hogy a két vizsgálat (elhanyagolható eltéréssel) azonos eredménnyel mutatta ki a jelentős feszültségtöbbletet. Az elemzett modellek esetével demonstráltam, hogy a keretszerkezetek optimumának meghatározásához kontinuum-modellt alkalmazó optimálási eljárás szükséges.

Kapcsolódó publikációk: [EP6], [EP5], [EP4], [EP3], [EP2]



## Publications of the Author Related to Thesis

---

- [EP1] Tazowski P, Lógó J, Pintér E. *Parametric Study on the Element Size Effect for Optimal Topologies*. Period Polytech Civil Eng. 2018. 62(1):267-276. (doi:10.3311/PPci.11551)
- [EP2] Lógó J, Balogh B, Pintér E. *Topology Optimization Considering Multiple Loading*. Comp and Struct. 2017. (doi:10.1016/j.compstruc.2017.03.018)
- [EP3] Lengyel A, Pintér E, Lógó J. *Loading uncertainties in structural topology optimization*. Research workshop, Visegrád Integration of Research in Mechanics of Material, Czestochowa. 8-9 July 2015.
- [EP4] Lógó J, Balogh B, Pintér E. *Topology optimization considering multiple loading*. In Kruis J, Tsompanakis Y, Topping BHV. (Eds) The fifteenth international conference on civil, structural and environmental engineering computing. Stirlingshire, UK: Civil-Comp Press. 2015. p.168. (doi:10.4203/ccp.108.168.) (ISBN:978-1-905088-63-8)
- [EP5] Pintér E, Lengyel A, Lógó J. *A terhelés bizonytalanságának figyelembe vétele a szerkezeti topológia-optimalásban*. In Baksa A, Bertóti E, Szirbik S. (Eds) XII. Magyar Mechanikai Konferencia. Miskolc, Hungary, 2015.08.25-2015.08.27. Miskolc: Miskolci Egyetem Gépészmérnöki és Informatikai Kar Műszaki Mechanikai Intézet, 2015. p.258:6 (ISBN:978-615-5216-74-9)
- [EP6] Pintér E, Lengyel A, Lógó J. *Structural topology optimization with stress constraint considering loading uncertainties*. Period Polytech Civil Eng. 2015. 59(4):559–65. (doi:10.3311/PPci.8848)
- [EP7] Rozvany GIN, Pinter E. *Structural Topology Optimization (STO) – Exact Analytical Solutions: Part II*. In Rozvany GIN, Lewiński T. (Eds) Topology Optimization in Structural and Continuum Mechanics. CISM International Centre for Mechanical Sciences. Vienna: Springer. 2014. 549:15-34. (doi:10.1007/978-3-7091-1643-2\_2) (ISBN:978-3-7091-1642-5 (print), 978-3-7091-1643-2 (online))
- [EP8] Lógó J, Balogh B, Pintér E. *On Optimal Structures considering Multiple Loadcases with Uncertain Loadings*. In Topping BHV, Iványi P. (Eds) Twelfth International Conference on Computational Structures Technology. Naples, Italy, 02-05.09.2014. Stirling, UK: Civil-Comp Press. 2014. p.138:16. (doi:10.4203/ccp.106.138) (ISBN:978-1-905088-61-4)
- [EP9] Pomezanski V, Rozvany GIN, Pinter E. *Facts and Fiction in Structural Topology Optimization*. In Topping BHV, Iványi P. (Eds) Twelfth International Conference on Computational Structures Technology. Naples, Italy, 02-05.09.2014. Stirling, UK: Civil-Comp Press. 2014. p.177:9. (doi:10.4203/ccp.106.177) (ISBN:978-1-905088-61-4)



- [EP10] Friedman N, Pomezanski V, Pintér E. *George Rozvany and Tomasz Lewiński (eds): Topology optimization in structural and continuum mechanics: CISM International Centre for Mechanical Sciences, Courses and Lectures, 2014, (ISBN 978-3-7091-1642-5) Vol. 549.* Book Review, Struct Multidisc Optim, Springer. 2013. 48(5):1027-29. (doi:10.1007/s00158-013-1007-5)
- [EP11] Lógó J, Pintér E, Vásárhelyi A. *On the optimal topologies considering uncertain load positions.* In Haftka RT, Kim NH. (Eds) 10th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization. Orlando, USA, 2013.05.19-2013.05.24. pp.1-10.
- [EP12] Lógó J, Pintér E. *Topology optimization considering uncertain loading positions and multiple load cases.* In Topping BHV, Iványi P. (Eds) Proceedings of the fourteenth international conference on civil, structural and environmental engineering computing. Cagliari, Italy, 03-06.09.2013. Stirlingshire, UK: Civil-Comp Press. 2013. p.108:19. (doi:10.4203/ccp.102.108.)
- [EP13] Lógó J, Pintér E. *Topology design of continuum type structures in the case of uncertain loading.* In Łodygowski T, Rakowski J, Garbowski T, Sumelka W. (Eds) 20th International Conference on Computer Methods in Mechanics. Poznan, Poland, 2013.08.27-2013.08.31. Poznan: Politechnika Poznanska. 2013. pp.MS05-33-MS05-34. (ISBN:978-83-89333-51-3, 9781138024823)
- [EP14] Lógó J, Pintér E. *On the optimal layout of structures subjected to probabilistic loading and stress constraint.* 19th Inter-Institute Seminar for Young Researchers. Vienna, Austria, 11-12.10.2013. Institute for Mechanics of Materials and Structures. 2013. (ISBN:978-3-9503537-2-3)
- [EP15] Lógó J, Pintér E. *Numerical Methods in Probabilistic Topology Optimisation: A Review.* In Topping BHV. (Ed) Computational Technology Reviews. Stirling: Saxe-Coburg Publications. 2012. pp.79-108. (doi:10.4203/ctr.5.3) (ISBN:978-1-874672-59-3)
- [EP16] Lógó J, Pintér E, Merczel DB. *Topology Optimization for the case of probabilistic loading.* In Topping BHV. (Ed) Proceedings of the Eleventh International Conference on Computational Structures Technology. Dubrovnik, Croatia, 04-07.09.2012. Stirling: Civil-Comp Press. 2012. 207:11. (doi:10.4203/ccp.99) (ISBN:978-1-905088-54-6)
- [EP17] Lógó J, Pintér E, Vásárhelyi A. *Considering Uncertain Load Positions in Topology Optimization.* In Kelliher D, Querin OM, Toropov VV, Siennz J. (Eds) Engineering Design Optimization - Product and Process Improvement: 9th ASMO UK / ISSMO Conference. Cork, Ireland, 05-06.07.2012. Cork: University of Leeds Press. pp.41-49.
- [EP18] Pintér E. *Parametric study on the optimal topologies due to uncertain load positions.* In Józsa J, Lovas T, Németh R. (Eds) Proceedings of the Conference of Junior Researchers in Civil Engineering 2012. Budapest, Hungary, 19-20.06.2012. Budapest: Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem. 2012. pp.177-184. (ISBN:978-963-313-061-2)